EINE SCHWACH-HOMOGEN WILDE TORUSFLÄCHE

Inaugural-Dissertation

der philosophisch-naturwissenschaftlichen Fakultät
der Universität Bern
zur Erlangung der Doktorwürde

vorgelegt von

PETER STOLL
von Guggisberg

Von der philosophisch-naturwissenschaftlichen Fakultät
auf Antrag des Herrn Prof. Dr. H.E. Debrunner angenommen

Bern, den 9. Juli 1970 Der Dekan: sig. Prof. Dr. J. Geiss

Universitätsdruckerei Bern Bern 1970

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

Inhaltsverzeichnis

1. Abschnitt	Einleitung	Seite 1
2. Abschnitt	Konstruktion der Torusfläche	Seite 3
2.1	Die Bezeichnungen	Seite 3
2.2	Die cube-with-eye-bolt's der ersten Generation	Seite 5
2.3	Die cube-with-eye-bolt's der zweiten Generation	Seite 7
2.4	Die cube-with-eye-bolt's der (k+1)-ten Generation	Seite 9
2.5	Eine Klasseneinteilung des E^3	Seite 11
3. Abschnitt	Der Quotientenraum E^3/G ist zum E^3 homöomorph	Seite 14
4. Abschnitt	Die Torusfläche ist in jedem Punkt lokalwild	Seite 17
5. Abschnitt	Die Torusfläche ist schwach-homogen	Seite 19
Figuren 1 und 2		Seite 22
Figur 3		Seite 23
Literaturverzeichnis		Seite 24
Lebenslauf		Seite 25

1. Einleitung

Eine kompakte top. 2-Mannigfaltigkeit M im E^3 heisst homogen, wenn es zu jedem Punktepaar $x,y \in M$ einen Homöomorphismus $h: E^3 \to E^3$ gibt, so dass $h(M) = M$ und $h(x) = y$ ist. Eine kompakte top. 2-Mannigfaltigkeit M im E^3 heisst schwach-homogen, wenn es zu jedem Punktepaar $x,y \in M$ und zu jeder Umgebung U von y einen Homöomorphismus $h: E^3 \to E^3$ gibt, so dass $h(M) = M$ und $h(x) \in U$ ist.

In der vorliegenden Arbeit beschreiben wir eine schwach-homogene Torusfläche T, welche in jedem Punkt lokalwild ist. Die Frage, ob es homogene, kompakte top. 2- Mannigfaltigkeiten im E^3 gibt, welche in jedem Punkt lokalwild sind, ist zur Zeit noch unbeantwortet (Problem von Gillman-Becker [2]).

X sei ein topologischer Raum. Eine Familie G von Teilmengen von X heisst genau dann eine "Klasseneinteilung" von X, wenn jeder Punkt von X zu genau einer Menge der Familie G gehört. Eine Klasseneinteilung G von X heisst genau dann "oberhalbstetig", wenn es zu jedem Element g der Familie G und zu jeder offenen Menge $U \supset g$ in X eine offene Menge V, $g \subset V \subset U$, gibt, so dass V die Vereinigungsmenge von Elementen aus G ist.

G sei eine oberhalbstetige Klasseneinteilung des topologischen Raumes X. Ferner sei B die Menge aller Teilmengen W von G, so dass die Vereinigung aller Elemente von W eine offene Menge in X ist. Dann ist B die Basis einer Topologie T für die Menge G. Die Menge G, zusammen mit der Topologie T,

heisst "Quotientenraum von X modulo G": X/G. Die natürliche Projektionsabbildung $p: X \to X/G$, die jedem $x \in X$ jene Menge aus G zuordnet, welche x enthält, ist surjektiv und stetig, und wegen der Überhalbstetigkeit von G eine abgeschlossene Abbildung.

Eine kompakte Teilmenge $T \subset E^3$ heisst polyedrisch, wenn sie als Vereinigung von endlich vielen Volltetraedern, Dreieckbereichen, Strecken und Punkten darstellbar ist. Eine kompakte Teilmenge $T \subset E^3$ heisst zahm im E^3, wenn es einen Raumhomöomorphismus $h: E^3 \to E^3$ gibt, der T in eine polyedrische Menge überführt; andernfalls heisst T wild im E^3. Eine kompakte top. 2-Mannigfaltigkeit M im E^3 heisst lokalzahm in einem Punkte $x \in M$, wenn eine abgeschlossene Umgebung U von x und ein Homöomorphismus $h: U \to V$ von U auf ein Volltetraeder $V \subset E^3$ existiert, so dass $h(U \cap M)$ polyedrisch im E^3 ist; andernfalls heisst M lokalwild im Punkte x.

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41547627_0037

2. Konstruktion der Torusfläche T

2.1 Die Bezeichnungen

Im E^3 sei mit $O(\xi_1|\xi_2|\xi_3)$ ein orthonormiertes, rechtsorientiertes Koordinatensystem ausgezeichnet. Wir betrachten die Torusfläche

$$T^{(1)} = \left\{ (\xi_1|\xi_2|\xi_3) \in E^3 \;/\; \left[(\xi_1^2 + \xi_2^2)^{1/2} - 2 \right]^2 + \xi_3^2 = 1 \right\}.$$

$T^{(1)}$ ist die Menge all jener Punkte des E^3, die man durch Rotation des Meridiankreises

$\left\{ (\xi_1|\xi_2|\xi_3) \in E^3 \;/\; (\xi_1 - 2)^2 + \xi_3^2 = 1, \;\; \xi_2 = 0 \right\}$ um die ξ_3-Achse erhält. Allgemein bezeichne $T^{(t)}$, für jedes $1/2 \leq t < 2$, die (gegenüber $T^{(1)}$ leicht vergrösserte, bezw. leicht verkleinerte) Torusfläche

$T^{(t)} = \left\{ (\xi_1|\xi_2|\xi_3) \in E^3 \;/\; \left[(\xi_1^2 + \xi_2^2)^{1/2} - 2 \right]^2 + \xi_3^2 = (2 - t)^2 \right\}$, welche den Kreis

$\left\{ (\xi_1|\xi_2|\xi_3) \in E^3 \;/\; \xi_1^2 + \xi_2^2 = t^2, \;\; \xi_3 = 0 \right\}$ als "inneren" Aequator besitzt.

Mit $a^{(t)}_{i_1 \dots i_k}$, $i_n \in \{0, 1, \dots, 9\}$ für jedes $n = 1, 2, \dots, k$, bezeichnen wir die auf die Torusfläche $T^{(t)}$ eingeschränkte Rotation des E^3 um die ξ_3-Achse, um den Winkel

$+\left(i_1 \cdot \frac{2\pi}{10} + i_2 \cdot \frac{2\pi}{100} + \dots + i_k \cdot \frac{2\pi}{10^k} \right)$, und mit

$b^{(t)}_{j_1 \dots j_k}$, $j_n \in \{0, 1, \dots, 9\}$ für jedes $n = 1, 2, \dots, k$, den Homöomorphismus von $T^{(t)}$ auf sich, welcher jeden Meridiankreis von $T^{(t)}$, d.h. jeden der beiden möglichen Schnittkreise von $T^{(t)}$ mit einer beliebigen Ebene E durch die ξ_3-Achse, um den Winkel

$\pm \left(j_1 \cdot \frac{2\pi}{10} + j_2 \cdot \frac{2\pi}{100} + \dots + j_k \cdot \frac{2\pi}{10^k} \right)$

in der Ebene E um den Kreismittelpunkt dreht.

Wenn wir mit $x^{(t)}_{\underbrace{0,\dots 0}_{k\text{-mal}}|\underbrace{0\dots 0}_{k\text{-mal}}}$ den Punkt $(0/t/0)$ auf dem inneren Aequator von $T^{(t)}$ bezeichnen, so sind (für festes t) die $(10)^{2k}$ - vielen Punkte

$x^{(t)}_{i_1 \dots i_k | j_1 \dots j_k} = (b^{(t)}_{j_1 \dots j_k} \circ a^{(t)}_{i_1 \dots i_k})(x^{(t)}_{0 \dots 0 | 0 \dots 0})$

($i_n, j_n \in \{0, 1, \dots, 9\}$ für jedes $n = 1, 2, \dots, k$) die Eckpunkte eines kurvilinearen Maschennetzes $M_k^{(t)}$ auf $T^{(t)}$. Jeder der beiden Homöomorphismen $a^{(t)}_{i_1 \dots i_k}$ und $b^{(t)}_{j_1 \dots j_k}$, erzeugt für festes t eine Permutation der Punkte $x^{(t)}_{i_1 \dots i_k | j_1 \dots j_k}$. Dabei wird jede von einer Masche des Netzes $M_k^{(t)}$ auf $T^{(t)}$ berandete Scheibe wieder auf eine solche abgebildet. Wir bezeichnen mit $D^{(t)}_{\underbrace{0 \dots 0}_{k\text{-mal}} | \underbrace{0 \dots 0}_{k\text{-mal}}}$ jene Scheibe auf $T^{(t)}$, deren Rand (eine Masche des Netzes $M_k^{(t)}$) die vier Punkte

$x^{(t)}_{0 \dots 0 | 0 \dots 0}$

$x^{(t)}_{0 \dots 0 | 0 \dots 01}$

$x^{(t)}_{0 \dots 01 | 0 \dots 0}$ und

$x^{(t)}_{0 \dots 01 | 0 \dots 01}$ enthält, und setzen:

$D^{(t)}_{i_1 \dots i_k | j_1 \dots j_k} = (b^{(t)}_{j_1 \dots j_k} \circ a^{(t)}_{i_1 \dots i_k}) D^{(t)}_{0 \dots 0 | 0 \dots 0}$.

Wir betrachten die Indicesfolge $\tau_k = (2^k - 1)/2^k$, welche für $k \to \infty$ streng monoton gegen 1 konvergiert, und bezeichnen mit $a_{i_1 \dots i_k}$ (bezw. mit $b_{j_1 \dots j_k}$) den Homöomorphismus von $\bigcup_{\frac{1}{2} \le t \le 1} T^{(t)}$ auf sich, definiert durch:

$a_{i_1 \dots i_k}$ (eingeschränkt auf $T^{(t)}$) $= a^{(t)}_{i_1 \dots i_k}$,

bezw. $b_{j_1 \dots j_k}$ (eingeschränkt auf $T^{(t)}$) $= b^{(t)}_{j_1 \dots j_k}$.

Ohne Mühe lassen sich diese Homöomorphismen zu Homöomorphismen des ganzen E^3 fortsetzen, welche den E^3 ausserhalb einer ε-Umgebung der Torusrinde $\bigcup_{\frac{1}{2} \le t \le 1} T^{(t)}$ punktweise fest lassen. Mit $W_{i_1 \dots i_k | j_1 \dots j_k}$ bezeichnen wir die zahme 3-Zelle $\bigcup_{\tau_{k+1} \le t \le 1} D^{(t)}_{i_1 \dots i_k | j_1 \dots j_k}$.

Als weiteres Hilfsmittel für unsere Konstruktion benötigen wir die, zuerst von R. H. Bing in ähnlichem Zusammenhang beschriebenen, "cube-with-eye-bolt's" [1]: Als "cube-with-eye-bolt" bezeichnen wir die Vereinigungsmenge einer zahmen 3-Zelle S mit einem Standard-Volltorus T, welcher S in genau einer Scheibe trifft (Figur 2). Die 3-Zelle S nennen wir "Stamm" des cube-with-eye-bolt's (T∪S).

2. 2 Die cube-with-eye-bolt's der ersten Generation; k = 1

Auf jede der Scheiben $D^{(1)}_{0|j_1}$ wird nach aussen hin je ein cube-with-eye-bolt $K_{0|j_1}$ aufgesetzt; Der Torus $T_{0|0}$ von $K_{0|0}$ umschlingt den Stamm $S_{0|1}$ von $K_{0|1}$, $T_{0|1}$ umschlingt $S_{0|2}$ usw., aber der Torus $T_{0|4}$ hängt frei; der Torus $T_{0|5}$ umschlingt $S_{0|6}$, $T_{0|6}$ umschlingt $S_{0|7}$ usw., aber der Torus $T_{0|9}$ hängt frei (Figur 1). Die $K_{0|j_1}$ liegen sämtliche in $\bigcup_{\frac{1}{2} \le t \le 1} D^{(t)}_{0|j_1}$ und es ist $K_{0|j_1} \cap \bigcup_{\frac{3}{4} \le t \le 1} T^{(t)} = W_{0|j_1}$ ("Wurzel des cube-with-eye-bolt's $K_{0|j_1}$"). Die Tori $T_{0|j_1}$ liegen zwischen den Torusflächen $T^{(1/2)}$ und $T^{(3/4)}$.

Durch die Homöomorphismen a_{i_1} lässt sich die eben beschriebene Konstruktion der $K_{0|j_1}$ über den $D^{(1)}_{0|j_1}$ auf die ganze Torusfläche $T^{(1)}$ erweitern: $K_{i_1|j_1} = a_{i_1}(K_{0|j_1})$, für jedes $i_1, j_1 \in \{0, 1, \ldots, 9\}$.

Wir beschreiben als nächstes Homöomorphismen des E^3 auf sich, die es gestatten werden, jeden cube-with-eye-bolt auf jeden anderen beliebigen cube-with-eye-bolt so abzubilden, dass sämtliche cube-with-eye-bolt's unter sich permutiert werden.

Es sei i_1 ein vorläufig fest gewählter Index und j_1 sei variabel. Dann gibt es einen Homöomorphismus von $Cl(\bigcup_{\frac{1}{2} \le t \le 1} D^{(t)}_{i_1|j_1} - \bigcup_{j_1} W_{i_1|j_1})$ auf sich, welcher die Verkettung der $K_{i_1|j_1}$ auflöst und welcher sämtliche Punkte auf dem Rand dieser Menge fest lässt: Wir lösen (mit einer Isotopie) den Torus $T_{i_1|3}$ vom cube-with-eye-bolt $K_{i_1|4}$ und den Torus $T_{i_1|8}$ vom cube-with-eye-bolt $K_{i_1|9}$, dann lösen wir $T_{i_1|2}$ vom deformierten $K_{i_1|3}$ und $T_{i_1|7}$ vom deformierten $K_{i_1|8}$ usw. (Die Figur 3 zeigt das beschriebene Verfahren schematisch für vier verkettete

cube-with-eye-bolt's). Wir können diesen Homöomorphismus so wählen, dass die deformierten $K_{i_1|j_1}$ anschliessend durch die Homöomorphismen b_{j_1} untereinander permutiert werden können; Wir sagen im folgenden kurz, es gebe einen Homöomorphismus, welcher die Verkettung der $K_{i_1|j_1}$ "passend bezüglich der b_{j_1} " auflöst.

Es ist leicht, einen Homöomorphismus $f_1 : E^3 \longrightarrow E^3$ zu finden, welcher für jedes $i_1, j_1 \in \{0, 1, \ldots, 9\}$ die Verkettung der $K_{i_1|j_1}$ passend bezüglich der b_{j_1} und der a_{i_1} auflöst, und welcher sämtliche Punkte von $E^3 - \bigcup_{\frac{1}{2} < t < \frac{3}{4}} T(t)$ fest lässt. Durch Verknüpfung der Homöomorphismen

$A^{(1)}_{i_1} = (f_1)^{-1} \circ a_{i_1} \circ f_1 : E^3 \longrightarrow E^3$ und

$B^{(1)}_{j_1} = (f_1)^{-1} \circ b_{j_1} \circ f_1 : E^3 \longrightarrow E^3$

gelingt es, jeden cube-with-eye-bolt auf jeden anderen beliebigen cube-with-eye-bolt so abzubilden, dass sämtliche cube-with-eye-bolt's unter sich permutiert werden.

2. 3 Die cube-with-eye-bolt's der zweiten Generation; k = 2

Auf jede der Scheiben $D^{(1)}_{i_1 i_2 | j_1 j_2}$ wird nach aussen hin je ein cube-with-eye-bolt $K_{i_1 i_2 | j_1 j_2}$ aufgesetzt. Im allgemeinen umschlingt der Torus $T_{i_1 i_2 | j_1 j_2}$ den Stamm des nächsten cube-with-eye-bolt's

$K_{i_1 i_2 | j_1 (j_2+1)}$ beziehungsweise $K_{i_1 i_2 | (j_1+1)\, 0}$;

einzig die Tori

$T_{i_1 i_2 | 2\ 4}$

$T_{i_1 i_2 | 4\ 9}$

$T_{i_1 i_2 | 7\ 4}$ und

$T_{i_1 i_2 | 9\ 9}$

hängen frei. Cube-with-eye-bolt's mit verschiedener Indizierung i_1, i_2 sind nicht miteinander verhängt.

Der Stamm $S_{i_1 i_2 | j_1 j_2}$ des cube-with-eye-bolt's $K_{i_1 i_2 | j_1 j_2}$ besitzt die 3-Zelle $W_{i_1 i_2 | j_1 j_2}$ als Wurzel, verjüngt sich anschliessend stark, durchläuft das Innere des cube-with-eye-bolt's $K_{i_1 | j_1}$ und des Torus $T_{i_1 | j_1}$, und endet schliesslich zwischen den Torusflächen $T^{(3/4)}$ und $T^{(7/8)}$; der Torus des cube-with-eye-bolt's $K_{i_1 i_2 | j_1 j_2}$ liegt zwischen $T^{(3/4)}$ und $T^{(7/8)}$ und umschlingt den stark verjüngten Stamm des nächsten cube-with-eye-bolt's, oder hängt frei.

Wir beschreiben als nächstes Homöomorphismen des E^3 auf sich, die es gestatten werden, jeden cube-with-eye-bolt $K_{i_1 | j_1}$ auf jeden anderen cube-with-eye-bolt der ersten Generation so abzubilden, dass sämtliche cube-with-eye-bolt's der ersten und der zweiten Generation unter sich permutiert werden. Die Homöomorphismen $B^{(1)}_{j_1}$ leisten das Verlangte offensichtlich nicht.

Die Indices i_1, i_2 seien vorläufig fest gewählt und j_1, j_2 seien variabel. Dann gibt es einen Homöomorphismus, welcher

- die Verkettung der $K_{i_1 i_2 | j_1 j_2}$ passend bezügl. der $b_{j_1 j_2}$ auflöst;
- sämtliche cube-with-eye-bolt's der zweiten Generation, die von i_1 oder i_2 verschiedene Indices besitzen, punktweise fest lässt;
- nur solche Punkte bewegt, die in $\operatorname{Int} \bigcup_{j_1} K_{i_1 | j_1}$, aber ausserhalb der Torusfläche $T^{(7/8)}$ liegen.

Es ist deshalb leicht, einen Homöomorphismus $f_2 : E^3 \to E^3$ zu finden, welcher für jedes $i_1, i_2, j_1, j_2 \in \{0, 1, \ldots, 9\}$ die Verkettung der $K_{i_1 i_2 | j_1 j_2}$ passend bezgl. der $b_{j_1 j_2}$ und der $a_{i_1 i_2}$ auflöst, und welcher sämtliche Punkte von $E^3 - \left(\bigcup_{1/2 < t < 7/8} T^{(t)} \cap \operatorname{Int} \bigcup_{i_1 j_1} K_{i_1 | j_1} \right)$ fest lässt. Durch Verknüpfung der Homöomorphismen

$A^{(2)}_{i_1} = (f_2)^{-1} \circ (f_1)^{-1} \circ a_{i_1} \circ f_1 \circ f_2 : E^3 \to E^3$ und

$B^{(2)}_{j_1} = (f_2)^{-1} \circ (f_1)^{-1} \circ b_{j_1} \circ f_1 \circ f_2 : E^3 \to E^3$ gelingt es, jeden cube-with-eye-bolt der ersten Generation so abzubilden, dass sämtliche cube-with-eye-bolt's der ersten und der zweiten Generation unter sich permutiert werden. Weiter gelingt es, durch Verknüpfung der Homöomorphismen

$A^{(1)}_{i_1 i_2} = (f_2)^{-1} \circ a_{i_1 i_2} \circ f_2$ und $B^{(1)}_{j_1 j_2} = (f_2)^{-1} \circ b_{j_1 j_2} \circ f_2$, jeden cube-with-eye-bolt der zweiten Generation auf jeden anderen beliebigen cube-with-eye-bolt der zweiten Generation so abzubilden, dass sämtliche cube-with-eye-bolt's der zweiten Generation unter sich permutiert werden.

2. 4 Die cube-with-eye-bolt's der (k+1)-ten Generation

Aehnlich, wie die cube-with-eye-bolt's der zweiten Generation in jene der ersten Generation eingebettet sind, sind jene der dritten Generation in jene der zweiten, jene der vierten in jene der dritten Generation usw. eingebettet. Wir beschreiben unter Weglassung der Details, wie die cube-with-eye-bolt's der (k+1)-ten Generation in jene der k-ten Generation eingebettet sind.

Für die cube-with-eye-bolt's $K_{i_1 \cdots i_k | j_1 \cdots j_k}$ der k-ten Generation gibt es einen Homöomorphismus $f_k : E^3 \to E^3$, welcher die Verkettung der $K_{i_1 \cdots i_k | j_1 \cdots j_k}$ passend bezgl. der $b_{j_1 \cdots j_k}$ und der $a_{i_1 \cdots i_k}$ auflöst, und welcher sämtliche Punkte von $E^3 - \left(\bigcup_{\frac{1}{2} < t < \tau_{k+1}} T^{(t)} \cap \operatorname{Int} \bigcup K_{i_1 \cdots i_{k-1} | j_1 \cdots j_{k-1}} \right)$ fest lässt.
Ferner gibt es die Raumhomöomorphismen:

$$A^{(k)}_{i_1} = (f_k)^{-1} \circ \cdots \circ (f_1)^{-1} \circ a_{i_1} \circ f_1 \circ \cdots \circ f_k$$
$$B^{(k)}_{j_1} = (f_k)^{-1} \circ \cdots \circ (f_1)^{-1} \circ b_{j_1} \circ f_1 \circ \cdots \circ f_k$$

$$A^{(k-1)}_{i_1 i_2} = (f_k)^{-1} \circ \cdots \circ (f_2)^{-1} \circ a_{i_1 i_2} \circ f_2 \circ \cdots \circ f_k$$
$$B^{(k-1)}_{j_1 j_2} = (f_k)^{-1} \circ \cdots \circ (f_2)^{-1} \circ b_{j_1 j_2} \circ f_2 \circ \cdots \circ f_k$$

(α)

$$\vdots$$

$$A^{(1)}_{i_1 \cdots i_k} = (f_k)^{-1} \circ a_{i_1 \cdots i_k} \circ f_k$$
$$B^{(1)}_{j_1 \cdots j_k} = (f_k)^{-1} \circ b_{j_1 \cdots j_k} \circ f_k \, .$$

Durch Verknüpfung der Homöomorphismen $A^{(s)}_{i_1 \cdots i_{k-s+1}}$ und $B^{(s)}_{j_1 \cdots j_{k-s+1}}$ (s = 1, 2, ..., k) gelingt es, jeden cube-with-eye-bolt der (k-s+1)-ten

Generation auf jeden anderen beliebigen cube-with-eye-bolt der (k-s+1)-ten Generation so abzubilden, dass sämtliche cube-with-eye-bolt's der Generationen (k-s+1), (k-s+2), ..., (k-1), k unter sich permutiert werden.

Auf jede der Scheiben $D^{(1)}_{i_1 \dots i_{k+1} | j_1 \dots j_{k+1}}$ wird nach aussen hin je ein cube-with-eye-bolt $K_{i_1 \dots i_{k+1} | j_1 \dots j_{k+1}}$ aufgesetzt. Im allgemeinen umschlingt der Torus $T_{i_1 \dots i_{k+1} | j_1 \dots j_{k+1}}$ den Stamm des nächsten cube-with-eye-bolt's; einzig die $((2 \cdot 10)^{k+1})$ Tori $T_{i_1 \dots i_{k+1} | j_1 \dots j_{k+1}}$, deren Indizierung $j_1, \dots, j_{k+1}$ als Dezimalbruch $0, j_1 j_2 j_3 \dots j_{k+1}$ geschrieben, dem Wert $(s/2^{k+1}) - (1/10^{k+1})$, $s = 1, 2, \dots, 2^{k+1}$, entspricht, hängen frei. Cube-with-eye-bolt's mit verschiedener Indizierung $i_1, i_2, \dots, i_{k+1}$ sind nicht miteinander verhängt.

Der Stamm $S_{i_1 \dots i_{k+1} | j_1 \dots j_{k+1}}$ des cube-with-eye-bolt's $K_{i_1 \dots i_{k+1} | j_1 \dots j_{k+1}}$ besitzt die 3-Zelle $W_{i_1 \dots i_{k+1} | j_1 \dots j_{k+1}}$ als Wurzel, verjüngt sich anschliessend stark, durchläuft das Innere des cube-with-eye-bolt's $K_{i_1 \dots i_k | j_1 \dots j_k}$ und des Torus $T_{i_1 \dots i_k | j_1 \dots j_k}$, und endet schliesslich zwischen den Torusflächen $T^{(\tau_{k+1})}$ und $T^{(\tau_{k+2})}$; der Torus des cube-with-eye-bolt's $K_{i_1 \dots i_{k+1} | j_1 \dots j_{k+1}}$ liegt zwischen $T^{(\tau_{k+1})}$ und $T^{(\tau_{k+2})}$ und umschlingt den stark verjüngten Stamm des nächsten cube-with-eye-bolt's, oder hängt frei.

Völlig analog, wie im Falle k = 2, überzeugen wir uns, dass es einen Homöomorphismus $f_{k+1} : E^3 \longrightarrow E^3$ geben muss, welcher die Verkettung der $K_{i_1 \dots i_{k+1} | j_1 \dots j_{k+1}}$ passend bezgl. der $b_{j_1 \dots j_{k+1}}$ und $a_{i_1 \dots i_{k+1}}$ auflöst, und welcher sämtliche Punkte von $E^3 - \left(\bigcup_{1/2 < t < \tau_{k+2}} T^{(t)} \cap \operatorname{Int} \bigcup K_{i_1 \dots i_k | j_1 \dots j_k} \right)$ fest lässt. Schliesslich lassen sich die Formeln (α) sinngemäss auf den vorliegenden Fall übertragen.

2. 5 Eine Klasseneinteilung G des E^3

Die Menge $K = (\bigcup K_{i_1|j_1} \cap \bigcup K_{i_1 i_2|j_1 j_2} \cap \ldots)$ ist ein kompaktes Kontinuum, [3] Theorem 38 p. 14, und es ist $T^{(1)} \subset K$. Wir beschreiben eine Klasseneinteilung G des E^3, deren Elemente kompakte Kontinua $g(x) \subset E^3$, $(x \in T^{(1)}$, $g(x) \cap T^{(1)} = x$, $\bigcup_{x \in T^{(1)}} g(x) = K)$, und die verbleibenden Punkte des E^3 sind. Zu diesem Zweck nennen wir einen Punkt $x \in T^{(1)}$

- einzählig, wenn $x \notin M_k^{(1)}$ für jedes $k \in \mathbb{N}$ ist;
- zweizählig, wenn der Punkt x zu einem Maschennetz $M_{k^*}^{(1)}$ gehört, aber nicht Eckpunkt eines beliebigen Maschennetzes $M_k^{(1)}$, $k \in \mathbb{N}$, ist;
- vierzählig, wenn x Eckpunkt eines Maschennetzes $M_k^{(1)}$ ist.

1. Fall; der Punkt x ist einzählig: In diesem Falle gibt es eine Scheibenfolge $\operatorname{Int} D^{(1)}_{i_1|j_1} \supset D^{(1)}_{i_1 i_2|j_1 j_2} \supset \operatorname{Int} D^{(1)}_{i_1 i_2|j_1 j_2} \supset D^{(1)}_{i_1 i_2 i_3|j_1 j_2 j_3} \supset \ldots$, so dass x der Durchschnitt dieser Folge ist. Wir setzen:

$g(x) = (K_{i_1|j_1} \cap K_{i_1 i_2|j_1 j_2} \cap \ldots)$; g(x) ist ein kompaktes Kontinuum, welches die Torusfläche $T^{(1)}$ genau in x trifft.

2. Fall; der Punkt x ist zweizählig: Dann gibt es genau zwei Scheibenfolgen $(D^{(1)}_{i_1|j_1} \supset D^{(1)}_{i_1 i_2|j_1 j_2} \supset \ldots.)$ und $(D^{(1)}_{i_1'|j_1'} \supset D^{(1)}_{i_1' i_2'|j_1' j_2'} \supset \ldots.)$, so dass x der Durchschnitt dieser zwei Folgen ist. Wir setzen:

$g(x) = (K_{i_1|j_1} \cup K_{i_1'|j_1'}) \cap (K_{i_1 i_2|j_1 j_2} \cup K_{i_1' i_2'|j_1' j_2'}) \cap (\quad) \cap \ldots.$;

g(x) ist ein kompaktes Kontinuum, welches $T^{(1)}$ genau in x trifft.

3. Fall; der Punkt x ist vierzählig: In diesem Falle gibt es vier Scheibenfolgen

$D^{(1)}_{i_1|j_1} \supset D^{(1)}_{i_1 i_2|j_1 j_2} \supset \ldots.$,

$D^{(1)}_{i_1'|j_1'} \supset D^{(1)}_{i_1' i_2'|j_1' j_2'} \supset \ldots.$,

$D^{(1)}_{i_1''|j_1''} \supset D^{(1)}_{i_1'' i_2''|j_1'' j_2''} \supset \ldots.$ und

$D^{(1)}_{i_1'''|j_1'''} \supset D^{(1)}_{i_1'''i_2'''|j_1'''j_2'''} \supset \ldots$, deren Durchschnitt genau x ist. Wir setzen:

$g(x) = (K_{i_1|j_1} \cup K_{i_1'|j_1'} \cup K_{i_1''|j_1''} \cup K_{i_1'''|j_1'''}) \cap (\quad) \cap \ldots;$

wieder ist g(x) ein kompaktes Kontinuum, welches $T^{(1)}$ genau in x trifft.

Satz: Die Klasseneinteilung G des E^3, deren Elemente die kompakten Kontinua g(x) und die Punkte der Menge $E^3 - \bigcup g(x)$ sind, ist oberhalbstetig.

Beweis: Wir zeigen, dass es zu jeder offenen Umgebung U von g(x) eine offene Umgebung $V \subset U$ von g(x) derart gibt, dass V die Vereinigungsmenge von Elementen aus G ist.

Es sei U eine vorgegebene offene Umgebung von g(x). Wir wählen nahe von x (evtl. x selber) einen vierzähligen Punkt $y \in T^{(1)}$, welcher gemeinsamer Eckpunkt von vier Scheiben $D_1^{(1)}$, $D_2^{(1)}$, $D_3^{(1)}$, $D_4^{(1)}$, $x \in \text{Int} \bigcup_{n=1}^{4} D_n^{(1)}$, der k-ten Scheibengeneration $D^{(1)}_{i_1 \ldots i_k | j_1 \ldots j_k}$ ist; der Index k ist so gross gewählt, dass

- alle cube-with-eye-bolt's von der k-ten Generation an, welche auf einer Unterscheibe von $D^{(1)} = \bigcup D_n^{(1)}$ aufgesetzt sind, in U enthalten sind;
- die Menge $\bigcup_{(1-\varepsilon)<t\leq 1} \text{Int } D^{(t)}$, $D^{(t)} = \bigcup D_n^{(t)}$, für ein passendes $\varepsilon > 0$ in U enthalten ist.

Die Vereinigungsmenge dieser, in U liegenden, cube-with-eye-bolt's sei C. Offensichtlich ist C abgeschlossen. Mit C* bezeichnen wir die Menge all jener Punkte von C, die nicht im Innern eines cube-with-eye-bolt's enthalten sind, welcher auf $T^{(1)} - \text{Int } D^{(1)}$ aufgesetzt ist und dessen Torus

in C liegt. Die Menge $C^* \subset U$ ist abgeschlossen, und es ist $C^* \cap T^{(1)} = D^{(1)}$.

Wir vermerken, dass aus der Abgeschlossenheit einer Teilmenge $X \subset T^{(1)}$ die Abgeschlossenheit der Menge $\bigcup_{x \in X} g(x)$ folgt. Deshalb ist $\bigcup_{x \in T^{(1)} - \mathrm{Int}\, D^{(1)}} g(x)$ abgeschlossen; damit ist auch die Menge $\bigcup_{x \in T^1 - \mathrm{Int}\, D^1} g(x) \cup (E^3 - \mathrm{Int}\, C^*)$ abgeschlossen, und ihr Komplement V^* im E^3 ist offen. Die Menge $V = V^* \cup \bigcup_{1-\varepsilon < t \leq 1} \mathrm{Int} D^{(t)}$ ist eine offene Umgebung von $g(x)$, welche in U enthalten ist. Offensichtlich ist V die Vereinigungsmenge von Elementen aus G: V enthält die kompakten Kontinua $g(x)$, $x \in \mathrm{Int}\, D^{(1)}$, und ist zu allen übrigen $g(x)$ der Klasseneinteilung G disjunkt. //

Der zu G gehörige Quotientenraum E^3/G ist zum E^3 homöomorph (Abschnitt 3). Die natürliche Projektionsabbildung $p: E^3 \to E^3/G$ bildet $\bigcup g(x)$ auf eine Torusfläche $T = p(\bigcup g(x)) \subset E^3/G$ ab. Diese Torusfläche ist schwach-homogen (Abschnitt 5) und in jedem Punkt lokalwild (Abschnitt 4).

3. Der Quotientenraum E^3/G ist zum E^3 homöomorph

Eine Isotopie f von $E^3 \to [0, 1]$ in den E^3 ist eine Homotopie von $E^3 \times [0, 1]$ in den E^3 derart, dass f_t für jedes $t \in [0, 1]$ ein Homöomorphismus ist. Unter einer Pseudoisotopie f von $E^3 \times [0, 1]$ in den E^3 verstehen wir eine Homotopie von $E^3 \times [0, 1]$ in den E^3 derart, dass f_t für jedes $t \in [0, 1)$ ein Homöomorphismus und für $t = 1$ eine stetige Abbildung des E^3 auf sich ist. Wir beschreiben als erstes eine Pseudoisotopie $f_t: E^3 \times [0, 1] \longrightarrow E^3$, so dass

- f_t für jedes $t \in [0, 1]$ die Torusfläche $T^{(1)}$ punktweise fest lässt;
- f_1 die Menge $E^3 - \bigcup g(x)$ homöomorph auf sich abbildet;
- f_1 jedes kompakte Kontinuum $g(x)$ auf den Punkt x abbildet.

Es gibt eine Isotopie $f_t^{(1)} : E^3 \times [0, 1/2] \longrightarrow E^3$, welche die Verkettung der cube-with-eye-bolt's der ersten Generation auflöst, und welche die Punkte des Volltorus $\bigcup_{3/4 \leq t \leq 2} T^{(t)}$ fest lässt. An diese Isotopie lässt sich eine Isotopie $f_t^{(2)}: E^3 \times [1/2, 3/4] \longrightarrow E^3$ anschliessen, welche die Verkettung der (deformierten) cube-with-eye-bolt's der zweiten Generation löst; dabei werden die cube-with-eye-bolt's der zweiten Generation so verkleinert (den Rand der deformierten Tori der ersten Generation festlassend), dass ihre Tori zwischen $T^{(3/4)}$ und $T^{(7/8)}$ zu liegen kommen. An die Isotopie $f_t^{(2)}$ lässt sich eine Isotopie $f_t^{(3)} : E^3 \times [3/4, 7/8] \longrightarrow E^3$ anschliessen, welche die Verkettung der deformierten cube-with-eye-bolt's der dritten Generation löst; dabei werden die cube-with-eye-bolt's der dritten Generation so verkleinert (den Rand der deformierten Tori der zweiten Generation festlassend), dass ihre Tori zwischen $T^{(7/8)}$ und $T^{(15/16)}$ zu liegen kommen, usw.

$f_1 = \lim_{n\to\infty} f^{(n)}_{(2^n-1)/2^n}$ ist eine stetige Abbildung des E^3 auf sich. Dies folgt aus der leicht verifizierbaren Ungleichung:

$\left| f_1^{(n')}(x) - f_1^{(n'')}(x) \right| < \varepsilon$, für jedes $\varepsilon > 0$ und $x \in E^3$; sofern n' und n'' beide grösser als ein bestimmter, nur von ε abhängiger, Index $n(\varepsilon)$ sind.

An dieser Stelle wird ersichtlich, warum die Tori $T_{i_1 \dots i_k \mid j_1 \dots j_k}$, deren Indizierung $j_1, \dots, j_k$ als Dezimalbruch $0, j_1 j_2 \dots j_k$ geschrieben, dem Wert $(s/2^k) - (1/10^k)$, $s = 1, 2, \dots, 2^k$, entspricht, frei hängen müssen; würden etwa nur die Tori $T_{i_1 \dots i_k \mid 99\dots9}$ frei hängen (vergl. dazu die Konstruktion von D. Gillman [2]), so gäbe es Punkte des E^3, welche unter $f_t^{(n)}$, für jedes $n \in \mathbb{N}$, sehr weit von ihrer Ausgangslage entfernt würden (Figur 3). Die Stetigkeit von f_1 liesse sich dann nicht schliessen.

Die stetige Abbildung f_1 ist auf der Menge $E^3 - \bigcup g(x)$ ein Homöomorphismus. Dies folgt aus der offensichtlichen Tatsache, dass es für jedes Punktepaar $x, y \in (E^3 - \bigcup g(x))$ einen Index $n(x,y)$ gibt, so dass $f^{(n)}_{(2^n-1)/2^n}$ auf $E^3 - \bigcup g(x)$ mit f_1 übereinstimmt, für jedes $n > n(x,y)$.

Offensichtlich lässt f_1 die Torusfläche $T^{(1)}$ punktweise fest, und bildet jedes $g(x)$ auf x ab. Ausserdem ist f_1 eine abgeschlossene Abbildung. Denn die Abbildung f_1 , auf $\bigcup_{\frac{1}{2} \le t \le 1} T^{(t)}$ eingeschränkt, ist als stetige Abbildung eines kompakten, Hausdorffschen Raumes auf sich eine abgeschlossene Abbildung, und ausserhalb $\bigcup_{\frac{1}{2} \le t \le 1} T^{(t)}$ bleiben die Punkte unter f_1 fest.

Wir definieren nun eine Abbildung $h: E^3 \longrightarrow E^3/G$ durch die Vorschrift: $h(x) = p\left[(f_1)^{-1}(x)\right]$, wenn p die Projektionsabbildung des E^3 auf E^3/G bedeutet. Diese Abbildung ist wohldefiniert.

Die Abbildung h ist stetig; denn aus der Abgeschlossenheit einer Menge $X \subset E^3/G$ folgt die Abgeschlossenheit von $p^{-1}(X) \subset E^3$, und aus der Abgeschlossenheit von f_1 folgt die Abgeschlossenheit von $f_1\left[p^{-1}(X)\right] \subset E^3$.

Die Abbildung h ist abgeschlossen; denn aus der Abgeschlossenheit einer Menge $X \subset E^3$ folgt, wegen der Stetigkeit von f_1, die Abgeschlossenheit von $(f_1)^{-1}(X) \subset E^3$, und wegen der Abgeschlossenheit von p ist auch $p\left[(f_1)^{-1}(X)\right] \subset E^3/G$ abgeschlossen. Schliesslich ist h auch injektiv; denn f_1 und p sind auf $E^3 - \bigcup g(x)$ bereits injektiv, und aus $x = y$, $x,y \in p(\bigcup g(x)) = T$, folgt $p^{-1}(x) = p^{-1}(y)$ und damit $f_1\left[p^{-1}(x)\right] = f_1\left[p^{-1}(y)\right]$.

Damit ist die Homöomorphie zwischen dem E^3 und E^3/G nachgewiesen.

4. Die Torusfläche T ist in jedem Punkt lokalwild

Definition: Es sei M eine kompakte top. 2-Mannigfaltigkeit im E^3, U eine Komponente von $E^3 - M$ und $x \in M$. U heisst "in engem Sinne lokal-einfachzusammenhängend" im Punkte x, wenn eine positive reelle Zahl ε derart existiert, dass es für jede offene Menge $V \subset E^3$, diam $V < \varepsilon$, $x \in V$, welche M in genau einer Scheibe D trifft, eine offene Menge $W \subset V$, $W \cap M = D$, derart gibt, dass jede in $W \cap U$ gelegene einfachgeschlossene Kurve in $V \cap U$ auf einen Punkt zusammenziehbar ist.

Wenn eine kompakte top. 2-Mannigfaltigkeit im E^3 in einem Punkte lokalzahm ist, dann sind die Restraumkomponenten in diesem Punkte in engem Sinne lokal-einfachzusammenhängend. Dies folgt aus der Definition der lokalen Zahmheit und aus der Tatsache, dass es für jede Scheibe D auf einer polyedrischen 2-Mannigfaltigkeit M im E^3 eine zahme 3-Zelle gibt, welche M genau in D trifft. Wir zeigen, dass die nichtbeschränkte Komponente Ext T von $E^3/G - T$ in keinem Punkte in engem Sinne lokal-einfachzusammenhängend sein kann. Daraus folgt die lokale Wildheit von T in jedem Punkt.

Es sei $x^* \in T$ und V^* eine ε-Umgebung von x^* in E^3/G. Dann ist $p^{-1}(x^*)$ ein kompaktes Kontinuum der Klasseneinteilung G, welches wir mit g(x) bezeichnen. Ferner sei U eine Umgebung von g(x), deren Bild unter p in V^* enthalten ist. Wir wählen genügend nahe von x (evtl. x selber) einen vierzähligen Punkt $y \in T^{(1)}$, welcher gemeinsamer Eckpunkt von vier Scheiben $D_1^{(1)}, D_2^{(1)}, D_3^{(1)}, D_4^{(1)}$, $D^{(1)} = \bigcup_{n=1}^{4} D_n^{(1)}$, $x \in \text{Int } D^{(1)}$, der k-ten Scheibengeneration ist; der Punkt y und der Index k sind so gewählt, dass die in Abschnitt 2.5 beschriebene offene Menge V, $V \cap T^{(1)} = \text{Int } D^{(1)}$, in U enthalten ist.

1. Fall Die Tori gewisser cube-with-eye-bolt's der (k+1)-ten Generation, wir nennen sie $T_{i_1 \dots i_{k+1} | j_1 \dots j_k 9}$, welche auf $D^{(1)}$ aufgesetzt sind umschlingen je den Stamm des nächsten, auf $T^{(1)} - \operatorname{Int} D^{(1)}$ aufgesetzten, cube-with-eye-bolt's der (k+1)-ten Generation. Dann umschlingen auch die Tori $T_{i_1 \dots i_{k+1} i_{k+2} | j_1 \dots j_k 99}$, $T_{i_1 \dots i_{k+1} i_{k+2} i_{k+3} | j_1 \dots j_k 999}, \dots$ je den Stamm des nächsten, auf $T^{(1)} - \operatorname{Int} D^{(1)}$ aufgesetzten, cube-with-eye-bolt's der Generationen (k+2), (k+3), ...

Die Menge $p(V)$ ist in E^3/G offen, trifft T genau in der Scheibe $p(\operatorname{Int} D^{(1)})$, und es ist $x^* \in p(V)$, $\operatorname{diam} p(V) < \varepsilon$. Es ist nun leicht, für jede offene Menge $W \subset p(V)$, $W \cap T = p(\operatorname{Int} D^{(1)})$, in $p^{-1}(W)$ eine einfachgeschlossene Kurve c zu finden, so dass $p(c)$ eine einfachgeschlossene Kurve in $W \cap \operatorname{Ext} T$ ist, welche sich in $p(V) \cap \operatorname{Ext} T$ nicht auf einen Punkt zusammenziehen lässt.

2. Fall Kein Torus eines, auf $D^{(1)}$ aufgesetzten, cube-with-eye-bolt's der (k+1)-ten Generation, umschlingt den Stamm des nächsten, auf $T^{(1)} - \operatorname{Int} D^{(1)}$ aufgesetzten, cube-with-eye-bolt's der (k+1)-ten Generation.

Der Punkt $y \in T^{(1)}$ ist gemeinsamer Eckpunkt von vier Scheiben $E_1^{(1)}$, $E_2^{(1)}$, $E_3^{(1)}$, $E_4^{(1)}$, $E^{(1)} = \bigcup_{n=1}^{4} E_n^{(1)}$, $x \in \operatorname{Int} E^{(1)}$, der (k+1)-ten Scheibengeneration. Die in Abschnitt 2.5 beschriebene, zu $g(x)$ gehörige, offene Menge V', $V' \cap T^{(1)} = \operatorname{Int} E^{(1)}$, ist in U enthalten. Die im ersten Fall auf $D^{(1)}$ und V angewendeten Schlüsse lassen sich jetzt sinngemäss auf $E^{(1)}$ und V' übertragen, wenn wir bedenken, dass es in jeder Generation (k+2), (k+3), ... gewisse cube-with-eye-bolt's gibt, welche auf $E^{(1)}$ aufgesetzt sind, und welche mit cube-with-eye-bolt's verhängt sind, die auf $T^{(1)} - \operatorname{Int} E^{(1)}$ aufgesetzt sind.

5. Die Torusfläche T ist schwach-homogen

a) Wir betrachten die in Abschnitt 2.4 beschriebenen Homöomorphismen $A^{(r)}_{i_1 \dots i_k}$ und $B^{(r)}_{j_1 \dots j_k}$. Den Index k denken wir uns im folgenden als fest und den Index r als variabel. Durch den Homöomorphismus $A^{(r)}_{i_1 \dots i_k}$ (alles weitere lässt sich sinngemäss auf die $B^{(r)}_{j_1 \dots j_k}$ übertragen) werden sämtliche cube-with-eye-bolt's der k-ten bis und mit der (k+r-1)-ten Generation unter sich permutiert. Hingegen werden die cube-with-eye-bolt's aller späteren Generationen nicht permutiert. Für jedes r' > r stimmen die beiden Homöomorphismen $A^{(r)}_{i_1 \dots i_k}$ und $A^{(r')}_{i_1 \dots i_k}$ einzig auf der offenen Menge $\left(\bigcup_{1/2 < t < \tau_{k+r'}} T^{(t)} \cap \operatorname{Int} \bigcup K_{i_1 \dots i_{k+r-1} | j_1 \dots j_{k+r-1}} \right)$ nicht überein. Wir vermerken speziell, dass die zwei homöomorphen Bilder eines cube-with-eye-bolt's der (k+r'-1)-ten Generation, unter $A^{(r)}_{i_1 \dots i_k}$ und unter $A^{(r')}_{i_1 \dots i_k}$, beide in die gleichen cube-with-eye-bolt's der (k+r-1)-ten Generation zu liegen kommen.

b) Für jeden Punkt $x \in \left(p(\operatorname{Int} \bigcup K_{i_1 \dots i_k | j_1 \dots j_k}) - T \right)$ gibt es einen Index $r(x) \in \mathbb{N}$ derart, dass x zwar in $E^3/G - p(\operatorname{Int} \bigcup K_{i_1 \dots i_{k+r(x)} | j_1 \dots j_{k+r(x)}})$, aber nicht in $E^3/G - p(\operatorname{Int} \bigcup K_{i_1 \dots i_{k+r(x)-1} | j_1 \dots j_{k+r(x)-1}})$ liegt.

Wir definieren:

- eine Abbildung $h_{i_1 \dots i_k} : E^3/G \to E^3/G$ durch:

  $h_{i_1 \dots i_k}(x) = (p \circ A^{(1)}_{i_1 \dots i_k}) \left[p^{-1}(x) \right]$, wenn $x \in E^3/G - p(\operatorname{Int} \bigcup K_{i_1 \dots i_k | j_1 \dots j_k})$;

  $h_{i_1 \dots i_k}(x) = (p \circ A^{r(x)+1}_{i_1 \dots i_k}) \left[p^{-1}(x) \right]$, wenn

  $x \in \left[p(\operatorname{Int} \bigcup K_{i_1 \dots i_k | j_1 \dots j_k}) - T \right]$;

  $h_{i_1 \dots i_k}(x) = (p \circ A^{(1)}_{i_1 \dots i_k}) \left[T^{(1)} \cap p^{-1}(x) \right]$, wenn $x \in T$;

- eine Abbildung $h_{j_1 \dots j_k} : E^3/G \to E^3/G$ durch:

$$h_{j_1\dots j_k}(x) = (p \circ B^{(1)}_{j_1\dots j_k})\left[p^{-1}(x)\right], \text{ wenn } x \in E^3/G - p\left(\mathrm{Int}\bigcup K_{i_1\dots i_k j_1\dots j_k}\right);$$

$$h_{j_1\dots j_k}(x) = (p \circ B^{r(x)+1}_{j_1\dots j_k})\left[p^{-1}(x)\right], \text{ wenn } x \in \left[p\left(\mathrm{Int}\bigcup K_{i_1\dots i_k j_1\dots j_k}\right) - T\right];$$

$$h_{j_1\dots j_k}(x) = (p \circ B^{(1)}_{j_1\dots j_k})\left[T^{(1)} \wedge p^{-1}(x)\right], \text{ wenn } x \in T.$$

Diese beiden Abbildungen sind wohldefiniert (Abschnitt a).

c) Die natürliche Projektionsabbildung p, eingeschränkt auf den Volltorus $\bigcup_{1/2 \le t \le 2} T^{(t)}$, ist als stetige Abbildung eines kompakten, metrischen Raumes in einen metrischen Raum gleichmässig stetig: Zu einem vorgegebenen $\varepsilon > 0$ existiert ein $\delta > 0$ derart, dass aus $\operatorname{diam} X < \delta$, für jede Menge $X \subset \bigcup_{1/2 \le t \le 2} T^{(t)}$, $\operatorname{diam} p(X) < \varepsilon/2$ folgt.

d) Wir betrachten die cube-with-eye-bolt's der (k+r)-ten Generation, deren Tori $T_{i_1\dots i_{k+r} j_1\dots j_{k+r}}$ frei hängen; es sind dies jene cube-with-eye-bolt's, deren Indices $j_1, j_2, \dots, j_{k+r}$ als Dezimalbruch $0, j_1 j_2 \dots j_{k+r}$ geschrieben, für ein passendes s der Gleichung

$$\left\{ s \in \{1, 2, \dots, 2^{k+r}\} \mid 0, j_1 \dots j_{k+r} = (s/2^{k+r}) - (1/10^{k+r}) \right\} \text{ genügen.}$$

Wir wählen einen Index r_0 so gross, dass für jede fest gewählte Indicesreihe $i_1, \dots, i_{k+r_0}$ und für jedes Paar $s', s'' \in \{1, 2, \dots, 2^{k+r_0}\}$, $|s' - s''| \le 2$, die Wurzeln der entsprechenden zwei cube-with-eye-bolt's in einer Menge enthalten sind, deren Durchmesser im Vergleich zu δ (Abschnitt c) sehr klein ist. Speziell liegen dann sämtliche cube-with-eye-bolt's der $(k+r_0)$-ten Generation in einer δ-Umgebung von $\bigcup_{z \in T^1} g(z) - T^{(1)}$.

e) Die Abbildungen $h_{i_1\dots i_k}$ und $h_{j_1\dots j_k}$ sind stetig. Aus a) und b) lässt sich leicht die Stetigkeit dieser Abbildungen in jedem Punkt $x \in E^3/G - T$ schliessen. Wir beweisen, dass $h_{i_1\dots i_k}$ auch in jedem Punkt $x \in T$ stetig ist.

Es sei U eine beliebig vorgegebene ε-Umgebung von $h_{i_1 \dots i_k}(x)$. Wir wählen nahe von $p^{-1}(x) \cap T^{(1)}$ (evtl. $p^{-1}(x) \cap T^{(1)}$ selber) einen vierzähligen Punkt $y \in T^{(1)}$, welcher gemeinsamer Eckpunkt von vier Scheiben $D_1^{(1)}$, $D_2^{(1)}$, $D_3^{(1)}$, $D_4^{(1)}$ der $(k+r_o+1)$-ten Scheibengeneration ist; $D^{(1)} = \bigcup D_n^{(1)}$, $(p^{-1}(x) \cap T^{(1)}) \in \operatorname{Int} D^{(1)}$. Wir betrachten die, in Abschnitt 2.5 beschriebene, zu $p^{-1}(x)$ gehörige, offene Menge V, $V \cap T^{(1)} = \operatorname{Int} D^{(1)}$, von welcher wir annehmen dürfen, dass sie in einer δ-Umgebung von $\bigcup_{z \in \operatorname{Int} D'} g(z) - T^{(1)}$ liegt. Das homöomorphe Bild von V unter $A^{(r)}_{i_1 \dots i_k}$, für jedes $r \geq r_o$, liegt dann in einer δ-Umgebung von $\bigcup_{z \in A^{(r)}_{i_1 \dots i_k}(\operatorname{Int} D^{(1)})} g(z) - T^{(1)}$ (Abschnitt d), vergl. dazu Figur 3). Wir zeigen, dass das Bild der offenen Umgebung $p(V) = V^*$ von x unter $h_{i_1 \dots i_k}$ in U enthalten ist.

Aus d) folgt $\operatorname{diam} D^{(1)} < \delta$; Aus d) und aus $A^{(r)}_{i_1 \dots i_k}$ (eingeschränkt auf $T^{(1)}$) $= A^{(1)}_{i_1 \dots i_k}$ folgt $\operatorname{diam} A^{(r)}_{i_1 \dots i_k}(D^{(1)}) < \delta$, für jedes $r \in \mathbb{N}$.

Daraus schliessen wir mit b) und c), dass

$\left| h_{i_1 \dots i_k}(z') - h_{i_1 \dots i_k}(x) \right| < \varepsilon/2$ für jedes $z' \in (V^* \cap T)$ gilt.

Für jedes $z \in V^* - T$ gibt es ein passendes $z' \in (V^* \cap T)$, so dass

$\left| h_{i_1 \dots i_k}(z) - h_{i_1 \dots i_k}(z') \right| = \left| (p \circ A^{r(x)+1}_{i_1 \dots i_k})\left[p^{-1}(z)\right] - h_{i_1 \dots i_k}(z') \right|$

kleiner als $\varepsilon/2$ ist; dies folgt aus $r(x)+1 \geq r_o$ (Abschnitt b), d) und c).

Die Dreiecksungleichung liefert schliesslich

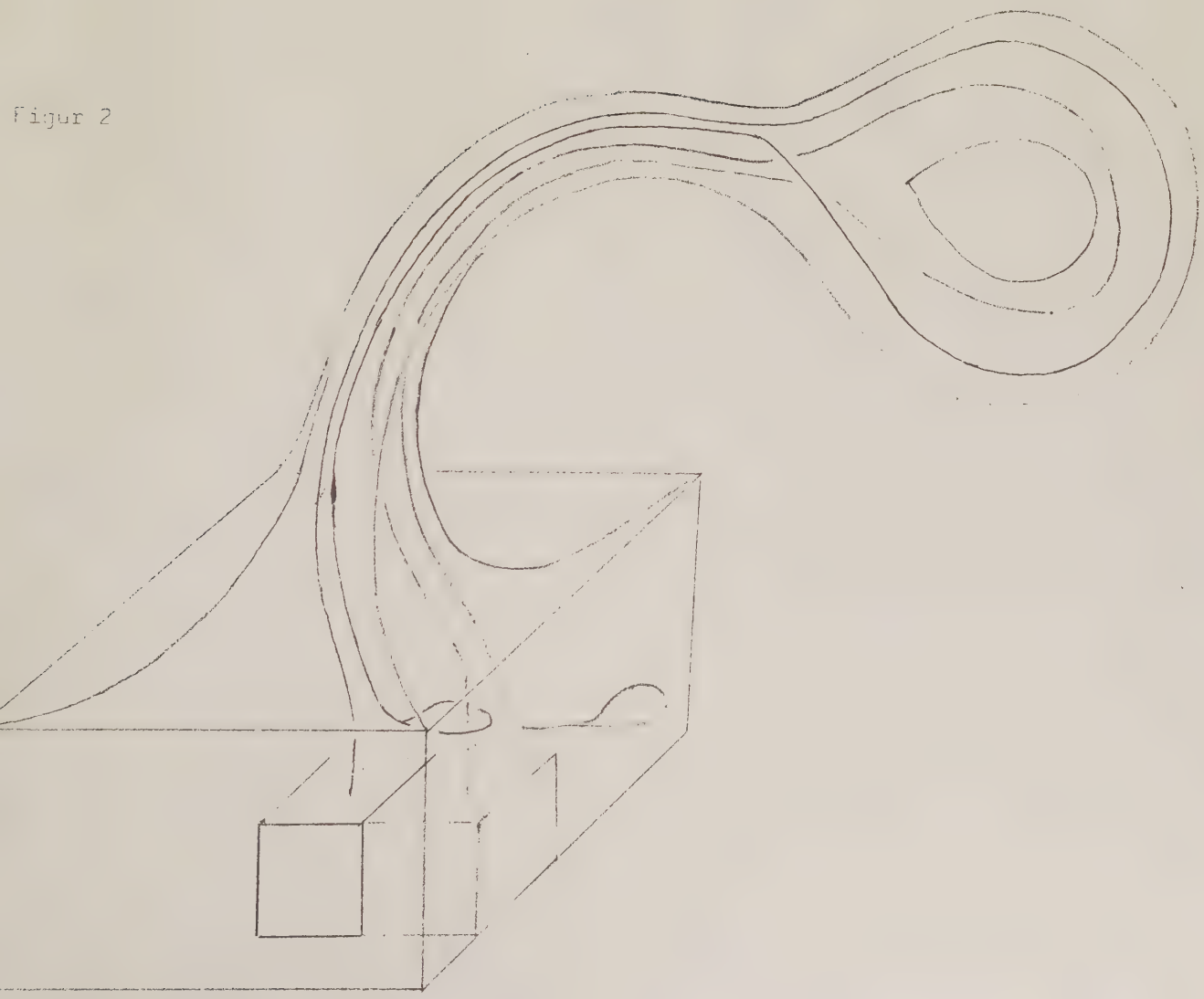
$\left| h_{i_1 \dots i_k}(z) - h_{i_1 \dots i_k}(x) \right| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$, für jedes $z \in V^*$.

f) Die Abbildungen $h_{i_1 \dots i_k}$ und $h_{j_1 \dots j_k}$ sind injektiv. Dies folgt direkt aus der Definition dieser Abbildungen.

g) Die Abbildung $h_{i_1 \dots i_k}$, eingeschränkt auf $p(\bigcup_{1/2 \leq t \leq 2} T^{(t)})$, ist als stetige Abbildung eines kompakten, Hausdorffschen Raumes in einen Hausdorffschen Raum eine abgeschlossene Abbildung; Weil die Punkte ausserhalb $p(\bigcup_{1/2 \leq t \leq 2} T^{(t)})$ unter $h_{i_1 \dots i_k}$ und $h_{j_1 \dots j_k}$ fest bleiben, sind diese Abbildungen abgeschlossen.

Figur 1

Figur 2



Figur 3

Literaturverzeichnis

(1) R. H. Bing — "A wild surface each of whose arcs is tame" Duke Math. J. 28 (1961) p. 1-16

(2) D. S. Gillman — "Note concerning a wild sphere of Bing" Duke Math. J. 31 (1964) p. 247-254

(3) R. L. Moore — "Foundations of Point Set Theory" Amer. Math. Soc. Colloquium Publications 13 revised edition (1962)

Lebenslauf

Am 28. Oktober 1942 wurde ich in Bolligen geboren. Die Primar- und die Sekundarschule besuchte ich in Bolligen, trat hierauf in die entsprechende Klasse des Realgymnasiums Bern-Kirchenfeld ein, und bestand hier im Jahre 1961 die Maturitätsprüfung. Sodann immatrikulierte ich mich in Bern an der philosophisch-naturwissenschaftlichen Fakultät. Im Jahre 1968 bestand ich die Lizentiatsprüfung im Hauptfach Mathematik und in den Nebenfächern Astronomie und Philosophie. Ich hörte Hauptfachvorlesungen bei den Herren Professoren Carnal, Debrunner, Hadwiger, Nef und Scherrer. Ihnen sowie allen meinen übrigen Lehrern bin ich zu grossem Dank verpflichtet.